

Uplatnenie výpočtových nástrojov IT vo vybraných témach lineárnej algebry

The application of computational tools of IT in selected topics of linear algebra

Dana ORSZÁGHOVÁ

Abstract

Numerical and graphical tools of mathematical software products are practical and useful for both, students and teachers at universities. In the contribution we present practical ways of applying of open access computing tools and their utilization in mathematics at university education, focusing on the topics of linear algebra. We bring the representative examples and tasks and the application of software products in solving problems in these topics: matrices, operations with matrices and determinants.

Keywords

Mathematics, linear algebra, matrix, determinant, applied tasks, production models, computational software products

Úvod

V informačnom veku, za ktorý je naša súčasnosť považovaná, sa menia aj podmienky, obsah a metódy vzdelávania. Informačné technológie (IT) ako významný jav informačnej spoločnosti sa stali súčasťou vzdelávania na vysokých školách a ich nástroje sa používajú rôznymi spôsobmi. Učiteľom slúžia nástroje IT na podporu aktívnej účasti študentov vo vzdelávaní, na tvorbu elektronických vzdelávacích zdrojov, na vytváranie zadaní úloh, overenie správnosti riešenia, prípadne grafickú interpretáciu úloh. Študenti môžu uplatniť nástroje IT v príprave na cvičenia, počas vypracovania seminárnej práce alebo aj v individuálnom štúdiu matematiky počas prípravy na skúšku.

Súčasťou vytvárania informačnej spoločnosti je vzdelávanie s novými kvalitami a modernými metódami, ku ktorým patrí uplatňovanie multimédií a virtuálnych prvkov vo vzdelávaní. Jednou zložkou práce vysokoškolských pedagógov je implementácia vzdelávacích systémov do štúdia a tvorba elektronických kurzov z matematiky [3], [6].

Na Fakulte ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre majú študenti v 1. ročníku bakalárskeho stupňa štúdia povinné predmety z matematiky. V príspevku sa budeme budeme zaoberať okruhom „Lineárna algebra“, ktorý sa vyučuje v letnom semestri a obsahuje tieto témy:

Vektory:

- pojem n -rozmerného vektora, operácie s vektormi,
- lineárna kombinácia vektorov,
- lineárna závislosť a nezávislosť vektorov.

Maticy:

- pojem matice, typy matíc, operácie s maticami,
- elementárne riadkové (stĺpcové) úpravy matíc,
- hodnosť matice,
- inverzná matica.

Determinanty:

- pojem a vlastnosti determinantu matice,
- výpočet hodnoty determinantu 2. a 3. stupňa,
- rozvoj determinantu 4. stupňa podľa riadku/stĺpca.

Sústavy lineárnych rovníc:

- homogénne a nehomogénne sústavy,
- metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc: Gaussova eliminačná metóda, metóda inverznej matice, metóda determinantov.

Skúsenosti zo vzdelávacej praxe potvrdzujú, že implementácia nových technológií a vedeckých inovácií si vyžaduje prispôsobenie didaktických foriem a metód vzdelávania novým podmienkam vo vzdelávaní. Nové trendy potrebujú pripravených učiteľov, ktorí aktívne ovládajú nástroje IT a vedia ich vo vzdelávaní uplatniť [1], [4].

Z realizovaných výskumov a praktickej výučby matematiky vyplýva, že študenti majú záujem o štúdium matematiky aj prostredníctvom informačných a komunikačných technológií. Tvorba a prezentácia elektronických kurzov s matematickými poznatkami môžu byť motiváciou záujmu o štúdium matematických metód a ich aplikácií [5], [10].

Integrácia digitálnych technológií konfrontuje učiteľov, pedagógov a výskumníkov s mnohými otázkami. Významnou otázkou teda je: Aký je potenciál informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní a v samostatnom štúdiu, a ktoré faktory sú rozhodujúce pri praktickom uplatnení týchto nástrojov v triede? [2].

Materiál a metódy

Hlavný materiál na spracovanie príspevku sme získali z výučby povinných predmetov z matematiky na Fakulte ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre. Ďalší materiál sme získali z riešenia výskumných úloh na Katedre matematiky, ktoré boli zamerané na implementáciu nástrojov IT do vzdelávania. Metodický postup vychádza z rozboru prednášok a cvičení z lineárnej algebry, ktoré boli doplnené o riešenie úloh s použitím vybraných grafických a výpočtových nástrojov. V príspevku sme sa zamerali na niektoré nástroje programu WolframAlpha, ktoré sú pre používateľov voľne prístupné na adrese <http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html> [11]. Ďalším dostupným softvérom je tabuľkový kalkulátor MS Excel.

Ukážky úloh a aplikácií lineárnej algebry v ekonómii

Input – output modely

Pri zisťovaní a odhadovaní účinkov zmeny cien určitých komodít na produkciu ostatných tovarov majú uplatnenie známe *input – output modely*. V tabuľke č. 1 je uvedený zjednodušený ekonomický model, ktorý je založený na troch komoditách – poľnohospodárske produkty, priemyselné produkty a palivá. Údaje napíšeme do tabuľky po prepočítaní na 1 jednotku. Údaje v 1. stĺpci výstupov vyjadrujú, koľko jednotiek poľnohospodárskych produktov, priemyselných produktov a palív potrebujeme na výrobu 1 jednotky poľnohospodárskych produktov. Obdobne, 2. stĺpec udáva, koľko jednotiek jednotlivých komodít potrebujeme na výrobu 1 jednotky priemyselných tovarov. Tretí stĺpec vyjadruje uvedené jednotky potrebné na výrobu 1 jednotky palív. Vidíme, že súčet jednotiek v jednotlivých stĺpcoch výstupov sa nerovná 1. Je to preto, že v tomto modeli nie sú reprezentované všetky komodity alebo odvetvia výroby (model neobsahuje napr. prácu).

VSTUPY	VÝSTUPY		
	PLH. PROD.	PRIEM. PROD.	PALIVÁ
PLH. PROD.	0,5	0,1	0,1
PRIEM. PROD.	0,2	0,5	0,3
PALIVÁ	0,1	0,3	0,4

Tab. 1

Údaje uvedené v tabuľke č. 1 môžeme napísať vo forme matice a s údajmi ďalej pracovať.

Maticu $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$ nazývame *technologická matica* (alebo *Leontiefova matica*). Ku

každjej výrobe alebo odvetviu môžeme priradiť hrubú (alebo celkovú) produkciu. Pre uvedený model *matica celkovej (hrubej) produkcie* je stĺpcová matica $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, kde x_1 je hrubá

poľnohospodárska produkcia, x_2 je hrubá priemyselná produkcia a x_3 je hrubá produkcia palív. Tie jednotky hrubého produktu, ktoré nie sú použité, tvoria *prebytok*. Ak jednotlivé prebytky napíšeme do stĺpcovej matice D , tak pre prebytok a matice A , X môžeme sformulovať maticovú rovnicu

$$X - A \cdot X = D$$

a po úprave má tvar

$$(E - A) \cdot X = D, \quad (1)$$

kde E je jednotková matica. Maticovú rovnicu (1) nazývame *technologická rovnica* otvoreného *Leontiefovho modelu*.

Produkčné modely

V nasledujúcej úlohe je prezentované použitie matíc v aplikačnej úlohe.

Úloha: Dodávateľská spoločnosť C investovala do výroby produktov V_1, V_2 sumu 15 400 €. Dodávateľská spoločnosť D investovala do výroby rovnakých produktov V_1, V_2 sumu 16 100 €. Dodávateľ C má pri dodávke zisk 20 € a 30 € na jeden výrobok V_1, V_2 . Dodávateľ D má pri dodávke zisk 15 € a 40 € na jeden výrobok V_1, V_2 . Vypočítajme, pri akej minimálnej produkcii sa dodávateľom vrátia ich investície.

Postup riešenia:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 400 \\ 16 & 100 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix}$$

Matica A vyjadruje zisk dodávateľov C, D na jeden výrobok V_1, V_2 .

Matica B vyjadruje celkové finančné investície dodávateľov C, D .

V matici X sú neznáme x_1, x_2 – počet výrobkov V_1, V_2 , ktorých produkcia zabezpečí dodávateľom návratnosť investícií.

Uvedené matice musia spĺňať rovnicu: $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Vypočítame inverznú maticu A^{-1} a následne pomocou uvedeného vzťahu prvky matice X :

$$(A | E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 15 & 40 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (E | A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{array} \right)$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15400 \\ 16100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 260 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix}$$

Zistili sme, že minimálna produkcia pre návratnosť investícií je 380 kusov výrobku V_1 a 260 kusov výrobku V_2 .

Ukážky použitia softvéru v riešení úloh z lineárnej algebry

V tejto časti uvedieme ukážky výpočtu úloh pomocou nástrojov MS Excel.

Nástroj MS Excel: výpočet hodnoty determinantu, výpočet inverznej matice

Determinant typu 3 x 3.

Zápis príkazu: {=MDETERM(G5:I7)}

1	5	-2
1	4	3
1	3	9
	D =	-1

Inverzná matica k matici typu 3 x 3.

Zápis príkazu: {=MINVERSE(A24:C26)}

Matica A		
2	-5	5
1	-2	2
2	-4	6
Inverzná matica		
-2	5	0
-1	1	0,5
0	-1	0,5

Ukážky zadání ďalších matematických úloh môžu študenti nájsť v učebniciach Katedry matematiky FEM SPU Nitra [7], [8].

Program WolframAlpha: ukážky výpočtu

Voľne prístupné nástroje programu WolframAlpha v časti „*Matrices and Linear Algebra*” môžeme použiť na niektoré výpočty z lineárnej algebry. Program ponúka rôzne možnosti, napr.: operácie s maticami, hodnosť matice, inverzná matica, determinant, lineárna nezávislosť, transformácia matic, diagonalizácia, redukcia riadkov a ďalšie.

V prvých dvoch úlohách použijeme tie isté zadania ako v predchádzajúcej úlohe.

Inverzná matica k matici typu 3 x 3.

Zápis príkazu: inv {{2, -5, 5}, {1, -2, 2}, {2,-4,6}}

Výstup z programu:

Input:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{matrix inverse})$$

Result:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Expanded form:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determinant typu 3 x 3.

Zápis príkazu:

det({{1, 5, -2}, {1,4,3}, {1,3,9}})

Výstup z programu:

Input:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Result: -1

Determinant typu 4 x 4.

Zápis príkazu:

det({{1, 5, -2,0}, {1,4,3,0}, {1,3,9,0}, {0,0,0,2}})

Výstup z programu:

Input:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Result: -2

Úprava matice na redukovaný trojuholníkový tvar.

Zápis príkazu: row reduce {{2,1,0,-3},{3,-1,0,1},{1,4,-2,-5}}

Výstup z programu:

Input:

row reduce	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$
------------	---

Result:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$$

Pri hľadaní ďalších možností sme našli zaujímavé informácie pre študentov na stránke [9], kde boli priame odkazy na kalkulatory, pomocou ktorých si môžu študenti skontrolovať správnosť výsledku po výpočte, napr.:

1. Function calculator (vypočíta deriváciu funkcie, Taylorov polynóm, integrály a zobrazí graf funkcie).
2. Matrix calculator (pre danú maticu vypočíta inverznú maticu, jej determinant a jednoduché výrazy).
3. Matrix multiplier (vypočíta súčin matic).
4. Linear solver (vyrieši sústavu lineárnych algebraických rovníc).
5. Solucia (rieši diferenciálne rovnice).
6. Alcula (počíta lineárnu a kvadratickú regresiu).

Záver

Hlavným zámerom v našom príspevku bolo upriamiť pozornosť na možnosti uplatnenia nástrojov IT vo výučbe tém z lineárnej algebry, ktoré majú aplikácie v odborných ekonomických predmetoch. Na konkrétnych príkladoch sme uviedli ukážky aplikačných úloh v témach lineárnej algebry. Slovné úlohy poskytujú priestor na konkrétne zadania z rôznych oblastí ekonomickej praxe, pričom najprv musíme zadanie úlohy analyzovať, zostaviť matematický zápis a následne použiť príslušnú metódu riešenia. Z ukážok vyplýva, že v aplikácii sa spájajú pojmy a metódy lineárnej algebry s praktickým kontextom ekonomických problémov.

Voľne prístupné softvéry a ich nástroje môžu študenti aj učitelia použiť na kontrolu výpočtov, pretože celý postup riešenia je zvyčajne prístupný v platenej, resp. registrovanej verzii programu. Uplatnenie nástrojov IT sme konkrétne prezentovali na vybraných úlohách z lineárnej algebry. Pomocou tabuľkového procesora MS Excel sme vypočítali príklady: hodnota determinantu a výpočet prvkov inverznej matice. Ďalšie ukážky úloh boli vyriešené pomocou nástrojov programu WolframAlpha: hodnota determinantu 3. stupňa, hodnota determinantu 4. stupňa, výpočet prvkov inverznej matice typu 3 x 3 a úprava matice na redukovaný trojuholníkový tvar.

Abstrakt

Výpočtové a grafické nástroje matematických softvérov sú praktické a užitočné tak pre študentov ako aj pre učiteľov na vysokých školách. V príspevku prezentujeme praktické možnosti uplatnenia voľne prístupných výpočtových nástrojov a aplikácií vo vysokoškolskom štúdiu matematiky so zameraním na hlavné témy lineárnej algebry. Konkrétne uvádzame ukážky typových úloh a použitie softvérov v riešení úloh k témam: matice, operácie s maticami a determinanty.

Kľúčové slová

matematika, lineárna algebra, matica, determinant, aplikačné úlohy, produkčné modely, výpočtový softvér

Literatúra

- [1] DRÁBEKOVÁ, J., ŠVECOVÁ, S., RUMANOVÁ, L. 2014. How to create tasks from mathematical literacy. The proceedings of the *12th Mathematical Conference in Nitra*, Constantine The Philosopher University in Nitra, Slovakia. [cit. 2016-03-16]. Retrieved from http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2014/proceedings/4_drabekova_svecova_rumanova_fulltext.pdf.
- [2] DRIJVERS, P. 2015. Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Springer International Publishing.
- [3] GREGÁŇOVÁ, R. 2009. *Kurzy v prostredí LMS Moodle – prostriedok e-vzdelávania v matematike*. In *Trendy ve vzdělávání 2009: zborník vedeckých prác z medzinárodnej vedecko-odbornej konferencie [CD-ROM]*. Olomouc: Votobia, 2009, s. 428-431. ISBN 978-80-7220-316-1.
- [4] KOŠOVSKÁ, I., FERENCZI VAŇOVÁ, A., VÁRYOVÁ, I. 2015. Tvorivosť učiteľa ako predpoklad skvalitňovania vzdelávacieho procesu. In *Dnešné trendy inovácií 2014*. Łomża: Printing house of Łomża state university of applied sciences, 2014, s. 88-95. ISBN 978-83-60571-36-1 (brož.).
- [5] MIŠÚTOVÁ, M., MIŠÚT, M. 2012. Impact of ICT on the Quality of Mathematical Education. In *Proceedings of the 6th International Multi-Conference on Society, Cybernetics and Informatics (IMSCI 2012)*. Orlando, Florida, USA. Florida: International Institute of Informatics and Systemics, 2012. S. 76-80. ISBN 978-1-936338-66-5.
- [6] ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., BARANÍKOVÁ, H., TÓTHOVÁ, D. 2010. *Multimédiá vo vyučovaní matematiky*. Nitra, SPU, 2010, s. 168, 1. vydanie. ISBN 978-80-552-0405-5.
- [7] ORSZÁGHOVÁ, D., MATUŠEK, V., PECHOČIAK, T., BARANÍKOVÁ, H., DRÁBEKOVÁ, J. 2013. *Matematika s aplikáciami*. 1. časť. 1. vyd. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2013. 312 s. ISBN 978-80-552-1093-3.
- [8] ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., PECHOČIAK, T., FARKAŠOVÁ, M., DRÁBEKOVÁ, J., KECSKÉS, N. 2014. *Matematika s aplikáciami*. 2. časť. 1. vyd. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2014. 196 s. ISBN 978-80-552-1138-1.
- [9] *Pro studenty - kalkulátory na webu*. [cit. 2016-05-16]. Dostupné na URL: <http://www.petrq.wz.cz/IntKalk.php>.
- [10] TÓTHOVÁ, D., FABUŠ, J. 2015. Portal of Slovak universities. In *ICABR 2015*. Brno: Mendel University. (2015), s. 1062-1068. ISBN 978-80-7509-379-0. [cit. 2016-05-16]. Dostupné na URL: <http://www.icabr.com/fullpapers/icabr2015.pdf>.
- [11] *WolframAlpha (webové aplikácie programu)*. [cit. 2015 – 11 - 28]. Dostupné na internete: <http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>.

Kontakt

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.

Department of Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, 949 76 Nitra, Slovak Republic

E-mail: Dana.Orszaghova@uniag.sk

Recenzent: Ing. Eva Oláhová, PhD., SPU v Nitre